

## 数 学

解答はすべて解答用紙の指定された場所に記入すること。

次の空欄のア、イ、ウ、…… に対応する数または符号 (-) をマークせよ。

1.  $a = \frac{2}{3 - \sqrt{8}}$  とする。このとき、 $a = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\sqrt{2}$  が成りたつ。

したがって、 $a$  の整数部分は  $\boxed{\text{ウエ}}$  であり、

$a$  の小数部分は  $\boxed{\text{イ}}\sqrt{2} - \boxed{\text{オ}}$  である。

ここで、 $a$  の小数部分を  $b$  とおく。このとき、 $b^2 + 10b = \boxed{\text{カ}}$  である。

さらに、 $\frac{2}{b+3} + \frac{2}{b+7} = \frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{2}}{\boxed{\text{ク}}}$  である。

2.  $a$  は実数の定数とする。  $x$  の関数

$$y = -4^x + 2^{x+3} + a - 18$$

を考える。  $2^x = X$  とおくと、上式は

$$y = -\left(X - \boxed{\text{ケ}}\right)^2 + a - \boxed{\text{コ}}$$

と変形できる。

(1)  $0 \leq x \leq 3$  のとき、 $\boxed{\text{サ}} \leq X \leq \boxed{\text{シ}}$  であり、この範囲において、 $y$  は

$$x = \boxed{\text{ス}}$$
 のとき、最大値  $a - \boxed{\text{セ}}$ 、

$$x = \boxed{\text{ソ}}$$
 のとき、最小値  $a - \boxed{\text{タチ}}$

をとる。

(2)  $0 \leq x \leq 3$  において、異なる2つの  $x$  の値に対して  $y = 0$  となるような  $a$  の値

の範囲は

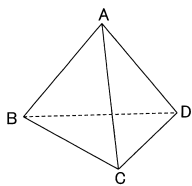
$$\boxed{\text{ツ}} < a \leq \boxed{\text{テト}}$$

である。

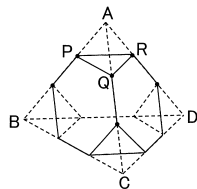
3. 1辺の長さが3の正四面体 ABCD がある。点 A から面 BCD に下ろした垂

線を AH とする。BH =  $\sqrt{\squareナ}$  であるから、AH =  $\sqrt{\squareニ}$  である。

したがって、正四面体 ABCD の体積は  $\frac{\squareヌ}{\squareノ}$  である。



正四面体 ABCD



立体 X

次に、上図のように正四面体 ABCD の各辺を3等分し、正四面体 ABCD から

点 A, B, C, D をそれぞれ頂点とする1辺の長さが1の正四面体を切り取って立体

X を作る。例えば、辺 AB, AC, AD における点 A に近い3等分点をそれぞれ P,

Q, R とすると、多面体 APQR は1辺の長さが1の正四面体である。

正四面体 APQR の体積は正四面体 ABCD の体積の  $\frac{1}{\squareハヒ}$  であり、

その値は  $\frac{\squareフ}{\squareヘホ}$  である。

したがって、立体 X の体積は  $\frac{\squareマミ}{\squareモ}$  である。

4. 実数  $a$  と  $b$  に対して、次の2つの放物線

$$C_1: f(x) = (x - a)^2$$

$$C_2: g(x) = -x^2 + b$$

がある。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  が直線  $\ell$  上の同一の点 P で接しているものとする。す

なわち、 $C_1$  と  $C_2$  は  $\ell$  上の点 P を共有し、かつ、点 P における  $C_1, C_2$  の接線は一

致するものとする。

ここで接線  $\ell$  の方程式を求めたい。

点 P の  $x$  座標を  $p$  とすると、 $f'(p) = \squareヤ(p - a)$ 、 $g'(p) = \squareユヨp$  である。

$f(p) = g(p)$ 、 $f'(p) = g'(p)$  より、 $a$  を  $p$  で表すと、 $a = \squareラp$  であり、

$b$  を  $p$  で表すと、 $b = \squareリp^2$  である。

したがって、接線  $\ell$  の方程式を  $p$  を用いて表すと、

$y = \squareルレpx + \squareロp^2$  となる。