数　　学

解答はすべて解答用紙の指定された場所に記入すること．

次の空欄の**ア**, **イ**, **ウ**, …… に対応する数値または符号 (−) をマークせよ．

1． 連立方程式

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} - 3^y = -2 & \cdots ① \\ 5\cdot 2^{-x} - \dfrac{1}{4}\cdot 3^{y-1} = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

を考える．

$2^{-x} = u$, $3^y = v$ とおくとき，① より $\boxed{\text{ア}}\,u - v = -2$ が成り立つ．

また，② より $\boxed{\text{イ}}\,u - \dfrac{1}{\boxed{\text{ウエ}}}v = 1$ が成り立つ．

よって，

$$u = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \quad v = \boxed{\text{キ}}$$

であるから，

$$x = \boxed{\text{ク}}, \quad y = \boxed{\text{ケ}}$$

である．

2． AB = 8, AC = 5, ∠CAB = 60° である △ABC を考える．

BC = $\boxed{\text{コ}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である．

△ABC の内接円が辺 BC, CA, AB とそれぞれ点 D, E, F で接しているとする．

△ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ である．AE = AF, BF = BD, CD = CE が成り立つことから，BD = $\boxed{\text{ソ}}$ である．

△ABC の内心を I とするとき，AI = $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である．さらに，線分 AE, AF および △ABC の内接円の優弧 EF で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}} + \boxed{\text{ト}}\pi$ である．

ただし，点 E, F を両端とする △ABC の内接円の円弧のうち，長いほうを △ABC の内接円の優弧 EF という．

3. a, b, c を実数の定数とする．関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は

$$f'(-1)=0 \quad \cdots\cdots(*) \quad \text{かつ} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

を満たす． 関数 $f(x)$ が $x=-1$ のとき極大値 0 をとるような a の値を求めよう．

条件 $(*)$ により，$b=\boxed{\text{ナ}}a-\boxed{\text{ニ}}$ $\cdots\cdots(\sharp)$ が成り立つ．このとき，

$$f'(x)=(x+1)\left(\boxed{\text{ヌ}}x+\boxed{\text{ネ}}a-\boxed{\text{ノ}}\right)$$

である．ここで，$a=\boxed{\text{ハ}}$ のとき，$f'(x)=0$ を満たす実数は 1 個であり，$a<\boxed{\text{ハ}}$ のとき，$f(-1)$ が関数 $f(x)$ の極大値である．

条件 $(**)$ により，$c=\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}a$ $\cdots\cdots(\sharp\sharp)$ である．

$(\sharp)$, $(\sharp\sharp)$, および $f(-1)=0$ であることから $a=\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ であり，これは $a<\boxed{\text{ハ}}$ を満たす．